

**SPINORTENZOROS 0 SPINŰ
RELATIVISZTIKUS KVANTUMMECHANIKA:
A COULOMB-PROBLÉMA**

Fülöp Tamás
BME GPK EGR Tsz.

2018.11.15, Budapest

Mafihe EHB TDK- és Szakdolgozati Hét

A feladat megfogalmazása:

A 0 spinű relativisztikus kvantummechanika skalár hullámfüggvényes, Klein-Gordon-egyenletes megfogalmazásában kérdéses a Hilbert-tér és a valószínűségi értelmezés. Ezek a problémák megoldódnak egy antiszimmetrikus spinortenzor hullámfüggvényes megfogalmazásban, mely analóg módon követi az $1/2$ spinű esetet és az abból szimmetrikus tenzorszorzatként konstruálható magasabb spinű eseteket. A kapott leírás szabad rendszerre ekvivalens a skalár hullámfüggvényes tárgyalással, a minimális csatolással leírt, adott potenciálmezőben történő mozgás esete azonban eltér. Ehhez kapcsolódik a megoldandó feladat: a Coulomb-probléma megoldása az antiszimmetrikus spinortenzor hullámfüggvényes leírásban.

A szabad Klein–Gordon-egyenlet, skalár hullámfüggvényre:

$$(\square + m^2) \varphi = 0$$

a $\frac{1}{2im} (\varphi^* \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^* \varphi)$ megmaradó áram nem pozitív definit

(“pozitív definit”: időszerű komponens nemnegatív függvény)

nem valószínűségi áram, hanem töltésáram

időben másodrendű egyenlet: φ, φ' kezdeti feltétel

Feshbach–Villars-formalizmus:
$$\begin{pmatrix} \varphi + \frac{i}{m} (\partial_0 + ieA_0) \varphi \\ \varphi - \frac{i}{m} (\partial_0 + ieA_0) \varphi \end{pmatrix}$$

a pozitív megoldásokra sem pozitív definit a töltéssűrűség

Szabad eset: $i\partial_0\varphi = \sqrt{-\Delta + m^2} \varphi$ megoldásaira a szokásos

L^2 -skalárszorzat időfüggetlen \implies valószínűségi leírás OK

nem-szabad rendszerekre általánosítás nem megy: $[\partial_\mu, A_\nu] \neq 0$

$\implies [(\partial^\mu + ieA^\mu)(\partial_\mu + ieA_\mu) - m^2] \varphi \neq 0$

1/2 spin: $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ pozitív definit, nem kell erőfeszítés, A_μ is OK

$$(154) \quad (U_{h,x\varphi})(p) = \exp i\{x,p\}\varphi(\delta(h)^{-1}p)^h.$$

$U \simeq U^{m,+j}$ by theorem 6.20.

The reader might have noticed that we have not treated the spinless case in terms of the spinor calculus. This can also be done provided we consider, instead of the bundle (149), the bundle where the fibers are made up of *skew symmetric* tensors. More precisely, let

$$(155) \quad B_m^{+,0} = \{(p,t) : p \in X_m^+, t \in \mathbf{C}^4 \otimes \mathbf{C}^4, t \text{ skew symmetric,} \\ (\sum p_r \gamma_r^\nu) t = m t, \nu = 1, 2\},$$

with the norm defined for any Borel section φ of the bundle by

$$(156) \quad \|\varphi\|^2 = \int_{\mathbf{R}^3} \langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle_2 d\beta_m^{+,2}(p).$$

The representation of G^* is then defined in the same way as (154). For a given $p \in X_m^+$, the fiber of $B_m^{+,0}$ at p consists of all skew symmetric elements of $B_m^{+,1/2}(p) \otimes B_m^{+,1/2}(p)$ which form an one-dimensional space. As the unitary group K^* has no nontrivial one-dimensional representations,



Varadarajan: Geometry of quantum theory I–II. (1968–70)

nemcsak az 1, 3/2, ... spinek mint szimmetrikus tenzorszorzatok, hanem a 0 is mint antiszimmetrikus

it induces the trivial representation on the fiber of $B_m^{+,0}$ at $(m,0,0,0)$. Hence the representation of G^* defined in the Hilbert space of sections of $B_m^{+,0}$ is equivalent to $U^{m,+j,0}$.

The Representations $U^{+, \pm n}$. These representations may be obtained by passing to the limit in $U^{m,+j}$ as $m \rightarrow 0+$. We write

csak a szabad eset

csak impulzustérben (lendülettérben)

csak az ábrázolást és a Hilbert-teret adja meg

koordinátatér?

fizikailag érdekes vizsgálatok?

kiterjesztés nem-szabad esetekre?

(mindenekelőtt: hogyan működik ez a konstrukció?)

Az $1/2$ spin esete: geometriai kép \implies a 0 spinű eset könnyű

Jelölések:

$$\hbar \equiv c \equiv 1,$$

g szignatúrája $(+---)$,

négyes indexek: $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

hármás indexek: $j, k = 1, 2, 3$

komplex konjugálás: $*$, transzponálás: \mathbb{T} , kombinációjuk: \dagger

csak $m > 0$, $p \in \mathcal{P}_m$: $p_0 = \sqrt{p_j p_j + m^2}$, $\int_{\mathcal{P}_m} \frac{d^3 \mathbf{p}}{p_0}$

Mátrixok:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságaik:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad \gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_j^\dagger = -\gamma_j,$$

$$\alpha_j = -\beta \gamma_j, \quad \gamma_\mu^\dagger \beta = \beta \gamma_\mu, \quad \alpha_j^\dagger = \alpha_j$$

Gyakran: $\theta \in \mathbb{C}^4, \quad \Theta \in \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4: \quad \bar{\theta} = \theta^\dagger \beta, \quad \bar{\Theta} = \Theta^\dagger \beta$

Geometriai hozzávalók:

Ha $p \in \mathcal{P}_m$: $p_\mu \gamma^\mu : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ sajátértékei $+m$, $-m$

a sajátalterek: $N_+(p)$, $N_-(p)$, mindkettő kétdimenziós

Például: $\check{p} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\check{p}_\mu \gamma^\mu = m \gamma^0 = m \beta$,

$$N_+(\check{p}) : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_-(\check{p}) : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_j p_j + \beta m$ sajátértékei, -alterei: $+p_0$, $-p_0$, $N_+(p)$, $N_-(p)$

1/2 spinű szabad kvantummechanika: a Dirac-egyenlet:

$$\gamma^\mu p_\mu \psi(p) = m\psi(p) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(p) \in N_+(p)$$

Például: $\check{p} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Egy L Lorentz-transzformáció D_L ábrázolása \mathbb{C}^4 -en:

$$\beta D_L^\dagger \beta = D_L^{-1}, \quad D_L (\gamma^\mu p_\mu) D_L^{-1} = \gamma^\mu (Lp)_\mu$$

a $\psi : \mathcal{P}_m \rightarrow \mathbb{C}^4$ függvényeken $(U_{(a,L)}\psi)(p) = e^{ip_\mu a^\mu} D_L \psi(L^{-1}p)$

a Poincaré-csoport irreducibilis sugárábrázolása

A Hilbert-tér:
$$\int_{\mathcal{P}_m} \overline{\psi(p)} \psi(p) \frac{m d^3 \mathbf{p}}{p_0} = \int_{\mathcal{P}_m} \psi(p)^\dagger \psi(p) \frac{m^2 d^3 \mathbf{p}}{p_0^2}$$

a
$$\gamma^\mu p_\mu \psi(p) = m \psi(p), \quad \text{azaz} \quad (\alpha_j p_j + \beta m) \psi(p) = p_0 \psi(p)$$

megoldásterére megszorítva Hilbert-teret biztosít

Foldy–Wouthuysen-transzformáció: minden p -re
$$\psi^W = \begin{pmatrix} \psi_1^W \\ \psi_2^W \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi^W(p) = W(p) \psi(p), \quad W(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} [(p_0 + m)I_4 - \alpha_j p_j]$$

Koordinátatér:

$$\int e^{-ip_\mu x^\mu} \psi(p) \frac{m d^3 \mathbf{p}}{p_0} = \int e^{-ip_0 x_0} e^{ip_j x_j} \psi(p) \frac{m d^3 \mathbf{p}}{p_0} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \psi(t, \mathbf{x})$$

$$\int (\psi^\dagger \psi) (t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad \text{időfüggetlen, egyenlő a lendülettérbeli normanégyzettel}$$

$$\psi(p) \in N_+(p), \quad \gamma^\mu p_\mu \psi = m\psi, \quad (\alpha_j p_j + \beta m) \psi = p_0 \psi$$

\implies

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu) \psi(x) = m\psi(x), \quad i\partial_t \psi(t, \mathbf{x}) = [\alpha_j (-i\partial_j) + \beta m] \psi(t, \mathbf{x})$$

Áram és Lagrange-sűrűség:

$$\psi^\dagger \psi = \bar{\psi} \beta \psi = \bar{\psi} \gamma^0 \psi: \quad \text{komponense} \quad j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \text{-nek}$$

Ez egy valós, pozitív definit, megmaradó Noether-áram:

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu) - m] \psi = 0: \quad \text{E-L-egyenlet} \quad \mathcal{L} = \bar{\psi} [\gamma^\mu (i\partial_\mu) - m] \psi \quad \text{-ből,}$$

a $\psi \mapsto e^{i\chi} \psi$ globális mértéktranszformáció Noether-árama

Megjegyzés: beszorozva $\gamma^\mu (i\partial_\mu) + m$ -mel:

$$(\square + m^2) \psi = 0: \quad \text{Klein-Gordon-egyenlet komponensenként}$$

0 spinű szabad kvantummechanika: analóg módon:

$$\psi: \mathbb{C}^4$$

$$\zeta: \mathbb{C}^4 \wedge \mathbb{C}^4$$

$$\psi(p) \in N_+(p)$$

$$\zeta(p) \in N_+(p) \wedge N_+(p)$$

$$\gamma^\mu p_\mu \psi = m\psi$$

$$\gamma^\mu p_\mu \zeta = m\zeta$$

$$\int \bar{\psi}\psi \frac{m d^3 \mathbf{p}}{p_0} = \int \psi^\dagger \psi \frac{m^3 d^3 \mathbf{p}}{p_0^2}$$

$$\int \text{Tr}(\bar{\zeta}\zeta) \frac{m d^3 \mathbf{p}}{p_0} = \int \text{Tr}(\zeta^\dagger \zeta) \frac{m^2 d^3 \mathbf{p}}{p_0^2}$$

Poincaré irred. ábr.-a

Poincaré irred. ábr.-a

lényegileg 2 szab. fok

lényegileg $2 \wedge 2 = 1$ szab. fok

$n_1, n_2 \in N_+(p), \quad n_3, n_4 \in N_-(p)$ **bázis \mathbb{C}^4 -ben:**

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) (c_{12} n_1 \wedge n_2 + c_{13} n_1 \wedge n_3 + \cdots + c_{34} n_3 \wedge n_4) = 0$$

$$\implies \text{egyedül } c_{12} \neq 0$$

Foldy–Wouthuysen:

$$W\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^W \\ \psi_2^W \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad W\zeta W^T = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_{12}^W & 0 & 0 \\ -\zeta_{12}^W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [\gamma^\mu (i\partial_\mu) - m] \psi$$

KG komponensenként

$$j^\mu = \text{Tr} (\bar{\zeta} \gamma^\mu \zeta)$$

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \{ \bar{\zeta} [\gamma^\mu (i\partial_\mu) - m] \zeta \}$$

KG komponensenként

Nem-szabad kvantummechanika: $\partial_\mu \rightsquigarrow \partial_\mu + ieA_\mu$

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \psi = 0 \quad [\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \zeta = 0$$

$$\partial_\mu \text{Tr} (\bar{\zeta}_1 \gamma^\mu \zeta_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_t \int \text{Tr} (\bar{\zeta}_1 \gamma^0 \zeta_2) \equiv \partial_t \int \text{Tr} (\zeta_1^\dagger \zeta_2) = 0:$$

időfüggetlen Hilberttér-skalárszorzat

$$[(\partial^\mu + ieA^\mu) (\partial_\mu + ieA_\mu) - m^2] \zeta \neq 0 :$$

nem a Klein–Gordon-egyenlet minimális csatolása

Mindezek: <https://arxiv.org/abs/1712.08220>

Hogyan tovább:

a Coulomb-problémán demonstrálni: nem ekvivalens a KG-al

másodkvantálás – a szabad rendszeré egyszerű kell legyen

új típusú térelméleti kölcsönhatások: pl. Higgs-bozon

1 spin mint szimmetrikus tenzorszorzat: QED, QCD

A feladat megfogalmazása:

A 0 spinű relativisztikus kvantummechanika skalár hullámfüggvényes, Klein-Gordon-egyenletes megfogalmazásában kérdéses a Hilbert-tér és a valószínűségi értelmezés. Ezek a problémák megoldódnak egy antiszimmetrikus spinortenzor hullámfüggvényes megfogalmazásban, mely analóg módon követi az $1/2$ spinű esetet és az abból szimmetrikus tenzorszorzatként konstruálható magasabb spinű eseteket. A kapott leírás szabad rendszerre ekvivalens a skalár hullámfüggvényes tárgyalással, a minimális csatolással leírt, adott potenciálmezőben történő mozgás esete azonban eltér. Ehhez kapcsolódik a megoldandó feladat: a Coulomb-probléma megoldása az antiszimmetrikus spinortenzor hullámfüggvényes leírásban.