Kvantum összefonódás és erősen korrelált rendszerek
MaFiHe TDK és Szakdolgozat Hét

Szalay Szilárd

MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont,
Szilárdtest Fizikai és Optikai Intézet,
Erősen Korrelált Rendszerek "Lendület" kutatócsoport

2015 november 9

Kvantum korrelációk

kvantum szuperpozíció elv: nemklasszikus viselkedés

- egyetlen rendszer: *határozatlansági relációk*
- összetett rendszer: *nemklasszikus korrelációk* (diszkord, összefonódás)
  tiszta összetett állapotnak is lehetnek kevert marginálisai

Kvantum korrelációk

kvantum szuperpozíció elv: nemklasszikus viselkedés

- egyetlen rendszer: *határozatlansági relációk*
- összetett rendszer: *nemklasszikus korrelációk* (diszkord, összefonódás)
  tiszta összetett állapotnak is lehetnek kevert marginálisai

soktest rendszerek: „erősen korrelált rendszerek fizikája"

- az (alap)állapot korreláció-szerkezete megjelenik
  a makroszkopikus fizikai tulajdonságokban is
- összefonódás felületi törvénye
- korrelációk és kvantumállapotok leírása (mátrix-szorzat állapotok)

Kvantum korrelációk

kvantum szuperpozíció elv: nemklasszikus viselkedés

- egyetlen rendszer: *határozatlansági relációk*
- összetett rendszer: *nemklasszikus korrelációk* (diszkord, összefonódás) tiszta összetett állapotnak is lehetnek kevert marginálisai

soktest rendszerek: „erősen korrelált rendszerek fizikája”

- az (alap)állapot korreláció-szerkezete megjelenik a makroszkopikus fizikai tulajdonságokban is
- összefonódás felületi törvénye
- korrelációk és kvantumállapotok leírása (mátrix-szorzat állapotok)

kevéstest rendszerek: „kvantum információ elmélet”

- hatékony kv. algoritmusok, titkos kv. kulcs megosztás, kv. teleportálás
- „a kvantum korreláció egy erőforrás”

A mi megközelítésünk

diszkrét véges rendszerek

- klasszikus: véges sok pontból álló konfig. tér (érme: 2, kocka: 6, ...)
- kvantum: véges dimenziós Hilbert tér
- geometriai „ránézés”
- a kvantummechanika koncepcionális kérdéseit
  nem temetik maguk alá nehéz funkanal problémák :)
- és mégsem játék modell!

A mi megközelítésünk

diszkrét véges rendszerek

- klasszikus: véges sok pontból álló konfig. tér (érme: 2, kocka: 6,...)
- kvantum: véges dimenziós Hilbert tér
- geometriai „ránézés”
- a kvantummechanika koncepcionális kérdéseit
  nem temetik maguk alá nehéz funkanal problémák :)
- és mégsem játék modell!

kvantum korrelációk, ahogyan én szeretem

- alapvető jelentőségű, szép, érdekes, mély problémák
- klasszikus vs. kvantum rendszerek információelméleti nézőpontból
- működik a laborban is

Tiszta és kevert állapotok

állapotvektorok, tiszta állapotok

- állapotvektorok tere: $\mathcal{H}$ Hilbert tér, $d = \dim \mathcal{H} < \infty$
- állapotvektor: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (normált),

Tiszta és kevert állapotok

állapotvektorok, tiszta állapotok

- állapotvektorok tere: $\mathcal{H}$ Hilbert tér, $d = \dim \mathcal{H} < \infty$
- állapotvektor: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (normált),
- mérhető mennyiség („obszervábilis”): A normális operátor
- mérési várhatóértékek: $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$

Tiszta és kevert állapotok

állapotvektorok, tiszta állapotok

- állapotvektorok tere: $\mathcal{H}$ Hilbert tér, $d = \dim \mathcal{H} < \infty$
- állapotvektor: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (normált),
- mérhető mennyiség („obszervábilis''): A normális operátor
- mérési várhatóértékek: $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$
- időfejlődés (zárt rendszerben): Schrödinger egyenlet

Tiszta és kevert állapotok

állapotvektorok, tiszta állapotok

- állapotvektorok tere: $\mathcal{H}$ Hilbert tér, $d = \dim \mathcal{H} < \infty$
- állapotvektor: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (normált),
- mérhető mennyiség („obszervábilis''): A normális operátor
- mérési várhatóértékek: $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$
- időfejlődés (zárt rendszerben): Schrödinger egyenlet

azonos rendszerek sokasága: kevert állapotok

- különböző $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektorral, p_j relatív gyakorisággal
- mérési várhatóértékek: $\langle A \rangle = \sum_j p_j \langle \psi_j | A | \psi_j \rangle = \mathrm{tr}(\varrho A)$

Tiszta és kevert állapotok

állapotvektorok, tiszta állapotok

- állapotvektorok tere: $\mathcal{H}$ Hilbert tér, $d = \dim \mathcal{H} < \infty$
- állapotvektor: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (normált), titszta állapot: $|\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P}$
- mérhető mennyiség („obszervábilis''): A normális operátor
- mérési várhatóértékek: $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$
- időfejlődés (zárt rendszerben): Schrödinger egyenlet

azonos rendszerek sokasága: kevert állapotok

- különböző $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektorral, p_j relatív gyakorisággal
- mérési várhatóértékek: $\langle A\rangle = \sum_j p_j\langle\psi_j|A|\psi_j\rangle = \mathrm{tr}(\varrho A)$
- sűrűségoperátor $\varrho = \sum_j p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j| \in \mathcal{D}$
- (kevert) állapotok tere: $\mathcal{D} = \mathrm{Conv}\,\mathcal{P}$ pozitív szemidefinit (és normált)

Tiszta és kevert állapotok

állapotvektorok, tiszta állapotok

- állapotvektorok tere: $\mathcal{H}$ Hilbert tér, $d = \dim \mathcal{H} < \infty$
- állapotvektor: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (normált), titszta állapot: $|\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P}$
- mérhető mennyiség („obszervábilis''): A normális operátor
- mérési várhatóértékek: $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$
- időfejlődés (zárt rendszerben): Schrödinger egyenlet

azonos rendszerek sokasága: kevert állapotok

- különböző $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektorral, p_j relatív gyakorisággal
- mérési várhatóértékek: $\langle A \rangle = \sum_j p_j \langle \psi_j | A | \psi_j \rangle = \mathrm{tr}(\varrho A)$
- sűrűségoperátor $\varrho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \in \mathcal{D}$
- (kevert) állapotok tere: $\mathcal{D} = \mathrm{Conv}\, \mathcal{P}$ pozitív szemidefinit (és normált)
- időfejlődés (zárt rendszerben): Neumann egyenlet

Kevertség és megkülönböztethetőség

kevertség mértéke:

- Neumann entrópia: $S(\varrho) = -\operatorname{tr} \varrho \ln \varrho$
- konkáv, nemnegatív, nulla pontosan tiszta állapotokra

Kevertség és megkülönböztethetőség

kevertség mértéke:

- Neumann entrópia: $S(\varrho) = -\operatorname{tr} \varrho \ln \varrho$
- konkáv, nemnegatív, nulla pontosan tiszta állapotokra
- Schur-konkáv: *entrópia* = *kevertség*

Kevertség és megkülönböztethetőség

kevertség mértéke:

- Neumann entrópia: $S(\varrho) = -\operatorname{tr}\varrho \ln \varrho$
- konkáv, nemnegatív, nulla pontosan tiszta állapotokra
- Schur-konkáv: *entrópia = kevertség*
  Schumacher zajmentes kódolási tétel:
  Neumann entrópia = kvantum információ tartalom

Kevertség és megkülönböztethetőség

kevertség mértéke:

- Neumann entrópia: $S(\varrho) = -\operatorname{tr} \varrho \ln \varrho$
- konkáv, nemnegatív, nulla pontosan tiszta állapotokra
- Schur-konkáv: *entrópia = kevertség*
  Schumacher zajmentes kódolási tétel:
  Neumann entrópia = kvantum információ tartalom

megkülönböztethetőség mértéke:

- (Umegaki) kvantum relatív entrópia: $D(\varrho||\omega) = \operatorname{tr} \varrho(\ln \varrho - \ln \omega)$
- együtt-konvex, nemnegatív, nulla pontosan ha $\varrho = \omega$

Kevertség és megkülönböztethetőség

kevertség mértéke:

- Neumann entrópia: $S(\varrho) = -\operatorname{tr}\varrho \ln \varrho$
- konkáv, nemnegatív, nulla pontosan tiszta állapotokra
- Schur-konkáv: *entrópia = kevertség*
  Schumacher zajmentes kódolási tétel:
  Neumann entrópia = kvantum információ tartalom

megkülönböztethetőség mértéke:

- (Umegaki) kvantum relatív entrópia: $D(\varrho||\omega) = \operatorname{tr}\varrho(\ln\varrho - \ln\omega)$
- együtt-konvex, nemnegatív, nulla pontosan ha $\varrho = \omega$
- kvantum Stein lemma: *relatív entrópia = megkülönböztethetőség*
  (tévesztés valószínűségének csökkenési rátája
  hipotézis tesztelésnél, Hiai & Petz)

Kevert állapotok

általánosan

- $\varrho \in \mathcal{D}$ állapot, $\varrho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, dekompozíció nem e.ért.
- spec: $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{d-1}$ tiszta állapot

Kevert állapotok

általánosan

- $\varrho \in \mathcal{D}$ állapot, $\varrho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, dekompozíció nem e.ért.
- spec: $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{d-1}$ tiszta állapot
- $\mathcal{D}$ konvex test, extrém pontjai $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$

Kevert állapotok

általánosan

- $\varrho \in \mathcal{D}$ állapot, $\varrho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, dekompozíció nem e.ért.
- spec: $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{d-1}$ tiszta állapot
- $\mathcal{D}$ konvex test, extrém pontjai $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$

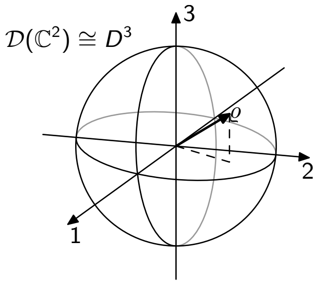
Példa: qubit ($d = 2$)

- $\mathcal{P} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$: Bloch gömb
- Bloch vektorral: $\varrho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})$
- tiszta állapotok: $|\mathbf{r}| = 1$
- kevert állapotok: $|\mathbf{r}| < 1$
- középpont: $|\mathbf{r}| = 0$ „fehér zaj”
- kevertség: $|\mathbf{r}|$-függő

Kevert állapotok

általánosan

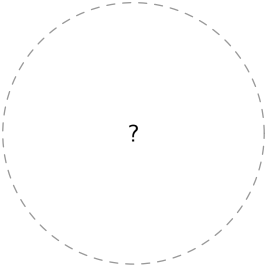
- $\varrho \in \mathcal{D}$ állapot, $\varrho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, dekompozíció nem e.ért.
- spec: $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{d-1}$ tiszta állapot
- $\mathcal{D}$ konvex test, extrém pontjai $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$



Példa: qubit ($d = 2$)

- $\mathcal{P} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$: Bloch gömb
- Bloch vektorral: $\varrho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})$
- tiszta állapotok: $|\mathbf{r}| = 1$
- kevert állapotok: $|\mathbf{r}| < 1$
- középpont: $|\mathbf{r}| = 0$ „fehér zaj”
- kevertség: $|\mathbf{r}|$-függő

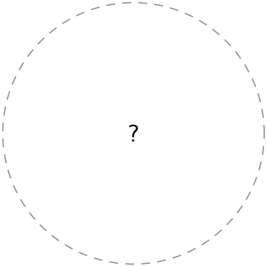
Kevert állapotok II.



qudit ($d > 2$)

- tiszta állapotok tere:
  $\mathcal{P} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{d-1} \cong S^{2d-1}/S^1$
  már nem lesz gömbfelület
- de egy gömbfelületen lesz egy nullmértékű részhalmaz

Kevert állapotok II.



qudit ($d > 2$)

- tiszta állapotok tere:
  $\mathcal{P} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{d-1} \cong S^{2d-1}/S^1$
  már nem lesz gömbfelület
- de egy gömbfelületen lesz egy nullmértékű részhalmaz
- állapotok tere: ennek konvex burka
- belül: $\operatorname{rk} \varrho = d$
- a határon: $\operatorname{rk} \varrho < d$
  (nem csak tiszta állapotok)
- tiszta állapotok: $\operatorname{rk} \varrho = 1$
  (extrém pontok)

Tiszta és kevert állapotok II.: mérés?

mérés

- $A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ megfigyelhető mennyiség
- $q_i = |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2$, vagy $q_i = \mathrm{tr}(\varrho|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|)$ (Born)
- mérés után $|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ tiszta állapotba „beugrik"

Tiszta és kevert állapotok II.: mérés?

mérés

- $A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ megfigyelhető mennyiség
- $q_i = |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2$, vagy $q_i = \mathrm{tr}(\varrho|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|)$ (Born)
- mérés után $|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ tiszta állapotba „beugrik”
- $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektorok, vagy $|\psi_j\rangle\langle\psi_j| \in \mathcal{P}$ tiszta állapotok

Tiszta és kevert állapotok II.: mérés?

mérés

- $A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ megfigyelhető mennyiség
- $q_i = |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2$, vagy $q_i = \mathrm{tr}(\varrho|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|)$ (Born)
- mérés után $|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ tiszta állapotba „beugrik"
- $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektorok, vagy $|\psi_j\rangle\langle\psi_j| \in \mathcal{P}$ tiszta állapotok

$\mathcal{H}$: lineáris kombináció (szuperpozíció)

- $c_j \in \mathbb{C}$, $\|c\|_2 = 1$
- $|\psi\rangle := \sum_j c_j |\psi_j\rangle$

$\mathcal{D}$: konvex kombináció (keverés „súlyozott átlag")

- $p_j \in \mathbb{R}$, $\|p\|_1 = 1$
- $\varrho := \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

Tiszta és kevert állapotok II.: mérés?

mérés

- $A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ megfigyelhető mennyiség
- $q_i = |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2$, vagy $q_i = \mathrm{tr}(\varrho|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|)$ (Born)
- mérés után $|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ tiszta állapotba „beugrik”
- $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektorok, vagy $|\psi_j\rangle\langle\psi_j| \in \mathcal{P}$ tiszta állapotok

$\mathcal{H}$: lineáris kombináció (szuperpozíció)

- $c_j \in \mathbb{C}$, $\|c\|_2 = 1$
- $|\psi\rangle := \sum_j c_j |\psi_j\rangle$
- Mérési statisztika:
  $q_i = |\sum_j c_j \langle\alpha_i|\psi_j\rangle|^2$

$\mathcal{D}$: konvex kombináció (keverés „súlyozott átlag”)

- $p_j \in \mathbb{R}$, $\|p\|_1 = 1$
- $\varrho := \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$
- Mérési statisztika:
  $q_i = \sum_j p_j |\langle\alpha_i|\psi_j\rangle|^2$

Tiszta és kevert állapotok II.: mérés?

mérés

- $A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ megfigyelhető mennyiség
- $q_i = |\langle\alpha_i|\psi\rangle|^2$, vagy $q_i = \mathrm{tr}(\varrho|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|)$ (Born)
- mérés után $|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ tiszta állapotba „beugrik"
- $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektorok, vagy $|\psi_j\rangle\langle\psi_j| \in \mathcal{P}$ tiszta állapotok

$\mathcal{H}$: lineáris kombináció (szuperpozíció)

- $c_j \in \mathbb{C}$, $\|c\|_2 = 1$
- $|\psi\rangle := \sum_j c_j |\psi_j\rangle$
- Mérési statisztika:
  $q_i = |\sum_j c_j \langle\alpha_i|\psi_j\rangle|^2$
- interferencia!

$\mathcal{D}$: konvex kombináció (keverés „súlyozott átlag")

- $p_j \in \mathbb{R}$, $\|p\|_1 = 1$
- $\varrho := \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$
- Mérési statisztika:
  $q_i = \sum_j p_j |\langle\alpha_i|\psi_j\rangle|^2$
- nincs interferencia!

Összetett rendszerek I.: tiszta állapotok

összetett rendszer állapotvektorai

- Hilbert tér: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$
- $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektor (normált)
- Ha $|\psi\rangle = |\psi^1\rangle \otimes |\psi^2\rangle$ akkor szeparálható, különben összefont.

Összetett rendszerek I.: tiszta állapotok

összetett rendszer állapotvektorai

- Hilbert tér: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$
- $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektor (normált)
- Ha $|\psi\rangle = |\psi^1\rangle \otimes |\psi^2\rangle$ akkor szeparálható, különben összefont.
- összefont álapot: mérés az egyiken a másik állapotát is beugrasztja (EPR baja)

Összetett rendszerek I.: tiszta állapotok

összetett rendszer állapotvektorai

- Hilbert tér: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$
- $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektor (normált)
- Ha $|\psi\rangle = |\psi^1\rangle \otimes |\psi^2\rangle$ akkor szeparálható, különben összefont.
- összefont álapot: mérés az egyiken a másik állapotát is beugrasztja (EPR baja)

a részrendszerek állapota

- $\varrho^1 = \mathrm{tr}_2(|\psi\rangle\langle\psi|)$, $\varrho^2 = \mathrm{tr}_1(|\psi\rangle\langle\psi|)$

Összetett rendszerek I.: tiszta állapotok

összetett rendszer állapotvektorai

- Hilbert tér: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$
- $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektor (normált)
- Ha $|\psi\rangle = |\psi^1\rangle \otimes |\psi^2\rangle$ akkor szeparálható, különben összefont.
- összefont álapot: mérés az egyiken a másik állapotát is beugrasztja (EPR baja)

a részrendszerek állapota

- $\varrho^1 = \mathrm{tr}_2(|\psi\rangle\langle\psi|)$, $\varrho^2 = \mathrm{tr}_1(|\psi\rangle\langle\psi|)$
- $|\psi\rangle$ összefont, akkor (és csak akkor) ϱ^1, ϱ^2 kevert!
  Schrödinger: az összetett rendszer teljes ismerete nem jelenti a részek teljes ismeretét

Összetett rendszerek I.: tiszta állapotok

összetett rendszer állapotvektorai

- Hilbert tér: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$
- $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ állapotvektor (normált)
- Ha $|\psi\rangle = |\psi^1\rangle \otimes |\psi^2\rangle$ akkor szeparálható, különben összefont.
- összefont álapot: mérés az egyiken a másik állapotát is beugrasztja (EPR baja)

a részrendszerek állapota

- $\varrho^1 = \mathrm{tr}_2(|\psi\rangle\langle\psi|)$, $\varrho^2 = \mathrm{tr}_1(|\psi\rangle\langle\psi|)$
- $|\psi\rangle$ összefont, akkor (és csak akkor) ϱ^1, ϱ^2 kevert!
  Schrödinger: az összetett rendszer teljes ismerete nem jelenti a részek teljes ismeretét
- ekkor korrelált! (klasszikus tiszta állapot korrelálatlan)
- összefonódás mértéke a részrendszer kevertsége (tiszta állapotra!): $E(|\psi\rangle) = S(\varrho^1)$ (összefonódási entrópia)

Összetett rendszerek II.: tiszta állapotok összefonódása

összefonódási entrópia

- összefonódás mértéke a részrendszer kevertsége (tiszta állapotra!): $E(|\psi\rangle) = S(\varrho^1)$ (összefonódási entrópia), de miért?

Összetett rendszerek II.: tiszta állapotok összefonódása

összefonódási entrópia

- összefonódás mértéke a részrendszer kevertsége (tiszta állapotra!): $E(|\psi\rangle) = S(\varrho^1)$ (összefonódási entrópia), de miért?
- geometriai korreláció mérték: a leghasonlóbb korrelálatlan állapot statisztikus megkülönböztethetősége a relatív entrópiával számolva:

$$\min_{\omega^1,\omega^2} D\big(\varrho\big\|\omega^1\otimes\omega^2\big) = D\big(\varrho\big\|\varrho^1\otimes\varrho^2\big) = S(\varrho^1)+S(\varrho^2)-S(\varrho) = I(\varrho),$$

kölcsönös információ

Összetett rendszerek II.: tiszta állapotok összefonódása

összefonódási entrópia

- összefonódás mértéke a részrendszer kevertsége (tiszta állapotra!): $E(|\psi\rangle) = S(\varrho^1)$ (összefonódási entrópia), de miért?
- geometriai korreláció mérték: a leghasonlóbb korrelálatlan állapot statisztikus megkülönböztethetősége a relatív entrópiával számolva:

$$\min_{\omega^1,\omega^2} D\big(\varrho\big\|\omega^1\otimes\omega^2\big) = D\big(\varrho\big\|\varrho^1\otimes\varrho^2\big) = S(\varrho^1) + S(\varrho^2) - S(\varrho) = I(\varrho),$$

kölcsönös információ

- klasszikus tiszta állapot korrelálatlan, tiszta kvantumállapot korrelációja: összefonódás (tiszta állapotban $S(\varrho) = 0$)

Összetett rendszerek III.

példa: két qubit állapotvektorai

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, és $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle \in \mathbb{C}^2$ ortonormált
- szeparálható pl: $|00\rangle$ ($\equiv |\phi_0\rangle \otimes |\phi_0\rangle$ gyorsírás)

Összetett rendszerek III.

példa: két qubit állapotvektorai

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, és $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle \in \mathbb{C}^2$ ortonormált
- szeparálható pl: $|00\rangle$ ($\equiv |\phi_0\rangle \otimes |\phi_0\rangle$ gyorsírás)
- maximálisan összefont pl: Bell állapotok

$$|B_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \qquad |B_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|B_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \qquad |B_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Összetett rendszerek III.

példa: két qubit állapotvektorai

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, és $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle \in \mathbb{C}^2$ ortonormált
- szeparálható pl: $|00\rangle$ ($\equiv |\phi_0\rangle \otimes |\phi_0\rangle$ gyorsírás)
- maximálisan összefont pl: Bell állapotok

$$|B_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \qquad |B_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|B_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \qquad |B_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

- LU-kanonikus alak: $|\psi_\alpha\rangle = \cos\alpha|00\rangle + \sin\alpha|11\rangle$
  ekkor: $\varrho_1 = \mathrm{tr}_2(|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|) = \cos^2\alpha|0\rangle\langle 0| + \sin^2\alpha|1\rangle\langle 1|$
- megmutatható: $\sin\alpha$ jól méri az összefonódást

Összetett rendszerek IV.

két részrendszer, kevert állapotok

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$
- (kevert) állapotok tere $\mathcal{D}$, pozitív szemidefinit (és normált)

Összetett rendszerek IV.

két részrendszer, kevert állapotok

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$
- (kevert) állapotok tere $\mathcal{D}$, pozitív szemidefinit (és normált)
- tiszta állapot $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ szeparálható, akkor $|\psi\rangle = |\psi^1\rangle \otimes |\psi^2\rangle$
- ekkor kevert állapot $\varrho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ szeparálható, ha létezik dekompozíció $|\psi_j\rangle = |\psi_j^1\rangle \otimes |\psi_j^2\rangle$, különben összefont

Werner: klasszikusan korrelált forrásokal létrehozható

Összetett rendszerek IV.

két részrendszer, kevert állapotok

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$
- (kevert) állapotok tere $\mathcal{D}$, pozitív szemidefinit (és normált)
- tiszta állapot $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ szeparálható, akkor $|\psi\rangle = |\psi^1\rangle \otimes |\psi^2\rangle$
- ekkor kevert állapot $\varrho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ szeparálható, ha létezik dekompozíció $|\psi_j\rangle = |\psi_j^1\rangle \otimes |\psi_j^2\rangle$, különben összefont

Werner: klasszikusan korrelált forrásokal létrehozható

geometria

- állatok: $\mathcal{D} = \operatorname{Conv}\mathcal{P}$ tiszta állatok konvex burka
- extrém pontok: tiszta állapotok, szeparálhatóak és összefontak

Összetett rendszerek IV.

két részrendszer, kevert állapotok

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$
- (kevert) állapotok tere $\mathcal{D}$, pozitív szemidefinit (és normált)
- tiszta állapot $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ szeparálható, akkor $|\psi\rangle = |\psi^1\rangle \otimes |\psi^2\rangle$
- ekkor kevert állapot $\varrho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ szeparálható, ha létezik dekompozíció $|\psi_j\rangle = |\psi_j^1\rangle \otimes |\psi_j^2\rangle$, különben összefont

Werner: klasszikusan korrelált forrásokal létrehozható

geometria

- állatok: $\mathcal{D} = \operatorname{Conv} \mathcal{P}$ tiszta állatok konvex burka
- extrém pontok: tiszta állapotok, szeparálhatóak és összefontak
- szeparálható állapotok: $\mathcal{D}^{\mathrm{sep}} \subset \mathcal{D}$, szep. tiszta állapotok konvex burka
- összefont állapotok: mindenki más $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{\mathrm{sep}}$

Összetett rendszerek V.: kevert állapotok összefonódása

entanglement of formation

- tiszta állapotok: összefonódás mértéke a részrendszer kevertsége, $E(|\psi\rangle) = S(\varrho^1)$ (összefonódási entrópia),
- jelentése: korreláció geometriai mértéke

Összetett rendszerek V.: kevert állapotok összefonódása

entanglement of formation

- tiszta állapotok: összefonódás mértéke a részrendszer kevertsége, $E(|\psi\rangle) = S(\varrho^1)$ (összefonódási entrópia),
- jelentése: korreláció geometriai mértéke
- kevert állapotok: az optimális dekompozíció átlagos összefonódása

$$E(\varrho) = \min_{\varrho=\sum_j p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|} \sum_j p_j E(|\psi_j\rangle)$$

entanglement of formation

Összetett rendszerek VI.

példák: két qubit kevert állapotok

- $\varrho = p|B_0\rangle\langle B_0| + (1-p)|B_3\rangle\langle B_3|$
- $p = \frac{1}{2}$-re szeparálható: $\varrho = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|$ separable

Összetett rendszerek VI.

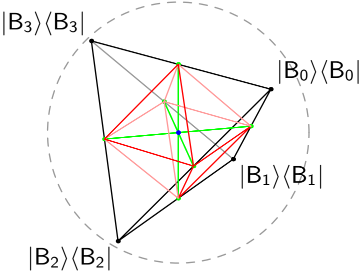
példák: két qubit kevert állapotok

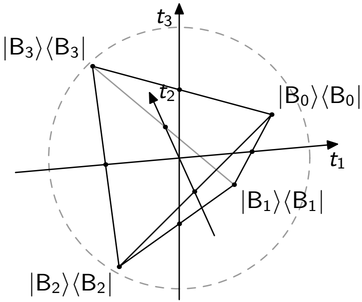
- $\varrho = p|B_0\rangle\langle B_0| + (1-p)|B_3\rangle\langle B_3|$
- $p = \frac{1}{2}$-re szeparálható: $\varrho = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|$ separable
- megmutatható, hogy szeparálható *akkor és csak akkor* $p = \frac{1}{2}$

Összetett rendszerek VI.

példák: két qubit kevert állapotok

- $\varrho = p|B_0\rangle\langle B_0| + (1-p)|B_3\rangle\langle B_3|$
- $p = \frac{1}{2}$-re szeparálható: $\varrho = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|$ separable
- megmutatható, hogy szeparálható *akkor és csak akkor* $p = \frac{1}{2}$

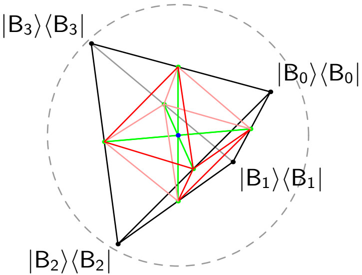


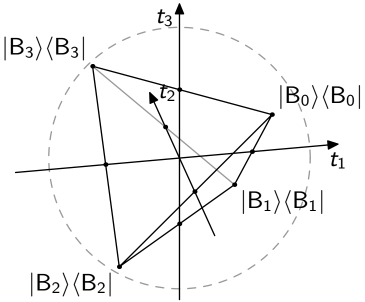


Összetett rendszerek VI.

példák: két qubit kevert állapotok

- $\varrho = p|B_0\rangle\langle B_0| + (1-p)|B_3\rangle\langle B_3|$
- $p = \frac{1}{2}$-re szeparálható: $\varrho = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|$ separable
- megmutatható, hogy szeparálható *akkor és csak akkor* $p = \frac{1}{2}$
- másik szeparálható: $\varrho = \sum_i \frac{1}{4}|B_i\rangle\langle B_i| = \frac{1}{4}I$





Összefonódás detektálása I.

CHSH (Bell) egyenlőtlenségek

- spinkorrelációs obszervábilis
  $S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}'\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}'\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a}'\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}'\boldsymbol{\sigma}$

Összefonódás detektálása I.

CHSH (Bell) egyenlőtlenségek

- spinkorrelációs obszervábilis
  $S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}'\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}'\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a}'\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}'\boldsymbol{\sigma}$
- CHSH egyenlőtlenség: (Clauser-Horne-Shimony-Holt)

$$|\mathrm{tr}(\varrho S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'})| \leq 2 \quad \text{bármely beállításra} \qquad \Longleftarrow \qquad \text{LHVM}$$

(Local Hidden Variable Model)

Összefonódás detektálása I.

CHSH (Bell) egyenlőtlenségek

- spinkorrelációs obszervábilis
  $S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}'\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}'\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a}'\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}'\boldsymbol{\sigma}$
- CHSH egyenlőtlenség: (Clauser-Horne-Shimony-Holt)

$$|\mathrm{tr}(\varrho S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'})| \leq 2 \quad \text{bármely beállításra} \qquad \Longleftarrow \qquad \text{LHVM}$$

  (Local Hidden Variable Model)
- tiszta állapotokra:

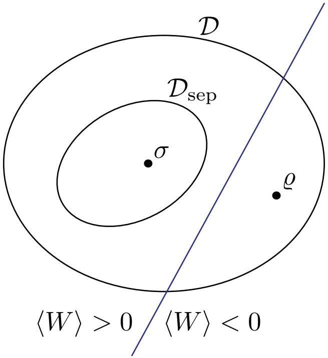
$$\varrho \in \mathcal{P}^{\mathrm{sep}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\mathrm{tr}(\varrho S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'})| \leq 2 \quad \text{bármely beállításra}$$

Összefonódás detektálása I.

CHSH (Bell) egyenlőtlenségek

- spinkorrelációs obszervábilis
  $S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}'\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}'\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a}'\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b}'\boldsymbol{\sigma}$
- CHSH egyenlőtlenség: (Clauser-Horne-Shimony-Holt)
  $$|\mathrm{tr}(\varrho S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'})| \leq 2 \quad \text{bármely beállításra} \qquad \Longleftarrow \qquad \text{LHVM}$$
  (Local Hidden Variable Model)
- tiszta állapotokra:
  $$\varrho \in \mathcal{P}^{\mathrm{sep}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\mathrm{tr}(\varrho S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'})| \leq 2 \quad \text{bármely beállításra}$$
- általában nem elég:
  $$\varrho \in \mathcal{D}^{\mathrm{sep}} \qquad \Longrightarrow \qquad |\mathrm{tr}(\varrho S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'})| \leq 2 \quad \text{bármely beállításra}$$

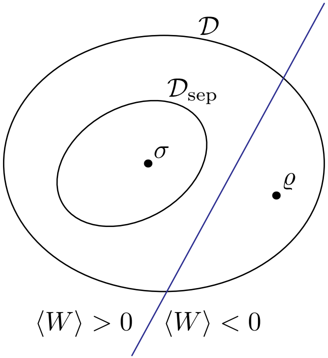
Összefonódás detektálása II.



Tanúk

- „Összefonódás tanú": W obszerv.,
  $\forall \sigma \in \mathcal{D}^{\text{sep}} : \text{tr}(\sigma W) \geq 0$ és
  $\exists \varrho \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{\text{sep}} : \text{tr}(\varrho W) < 0$

Összefonódás detektálása II.



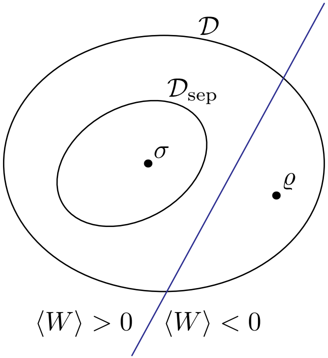
Tanúk

- „Összefonódás tanú": W obszerv., $\forall \sigma \in \mathcal{D}^{\text{sep}} : \operatorname{tr}(\sigma W) \geq 0$ és $\exists \varrho \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{\text{sep}} : \operatorname{tr}(\varrho W) < 0$
- minden összefont állapothoz lehet találni tanút
- „$\mathcal{D}^{\text{sep}}$ konvex halmaz körbevágása"

$$\varrho \in \mathcal{D}_{\text{sep}} \iff \langle W \rangle \equiv \operatorname{tr} W\varrho \geq 0 \quad \text{minden } W \text{ tanúra,}$$

$$\varrho \in \mathcal{D}_{\text{sep}} \implies \langle W \rangle \equiv \operatorname{tr} W\varrho \geq 0 \quad \text{valamely } W \text{ tanúkra.}$$

Összefonódás detektálása II.



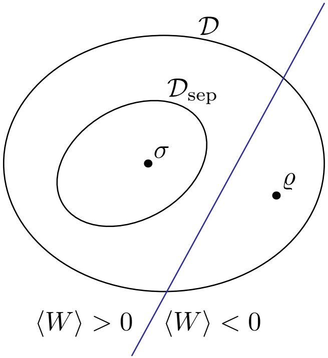
Tanúk

- „Összefonódás tanú": W obszerv., $\forall\sigma\in\mathcal{D}^{\mathrm{sep}}: \mathrm{tr}(\sigma W)\geq 0$ és $\exists\varrho\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^{\mathrm{sep}}: \mathrm{tr}(\varrho W) < 0$
- minden összefont állapothoz lehet találni tanút
- „$\mathcal{D}^{\mathrm{sep}}$ konvex halmaz körbevágása"
- $W_{\mathrm{CHSH}} = 2I\otimes I - S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'}$ „Bell-tanú" (nem elég)

$$\varrho\in\mathcal{D}_{\mathrm{sep}} \iff \langle W\rangle\equiv \mathrm{tr}\,W\varrho\geq 0 \quad \text{minden } W \text{ tanúra,}$$

$$\varrho\in\mathcal{D}_{\mathrm{sep}} \implies \langle W\rangle\equiv \mathrm{tr}\,W\varrho\geq 0 \quad \text{valamely } W \text{ tanúkra.}$$

Összefonódás detektálása II.



Tanúk

- „Összefonódás tanú": W obszerv., $\forall \sigma \in \mathcal{D}^{\mathrm{sep}} : \mathrm{tr}(\sigma W) \geq 0$ és $\exists \varrho \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{\mathrm{sep}} : \mathrm{tr}(\varrho W) < 0$
- minden összefont állapothoz lehet találni tanút
- „$\mathcal{D}^{\mathrm{sep}}$ konvex halmaz körbevágása"
- $W_{\mathrm{CHSH}} = 2I \otimes I - S_{\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'}$ „Bell-tanú" (nem elég)
- vannak nemlineáris kritériumok is, pl. nemlineáris Bell egyenlőtlenségek

$$\varrho \in \mathcal{D}_{\mathrm{sep}} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle W \rangle \equiv \mathrm{tr}\, W\varrho \geq 0 \quad \text{minden } W \text{ tanúra,}$$

$$\varrho \in \mathcal{D}_{\mathrm{sep}} \quad \Longrightarrow \quad \langle W \rangle \equiv \mathrm{tr}\, W\varrho \geq 0 \quad \text{valamely } W \text{ tanúkra.}$$

Összefonódás detektálása III.

entropikus kritériumok

- „szeparálható állapot: az egész rendezetlenebb, mint a részek”

$$\varrho \in \mathcal{D}^{\text{sep}} \qquad \Longrightarrow \qquad S(\varrho^1) \leq S(\varrho) \quad \text{és} \quad S(\varrho^2) \leq S(\varrho)$$

- pl. $S(\varrho) = -\operatorname{tr}(\varrho \ln \varrho)$ Neumann entrópia (Rényi, Tsallis is jó)

Összefonódás detektálása III.

entropikus kritériumok

- „szeparálható állapot: az egész rendezetlenebb, mint a részek”

$$\varrho \in \mathcal{D}^{\text{sep}} \qquad \Longrightarrow \qquad S(\varrho^1) \leq S(\varrho) \quad \text{és} \quad S(\varrho^2) \leq S(\varrho)$$

- pl. $S(\varrho) = -\operatorname{tr}(\varrho \ln \varrho)$ Neumann entrópia (Rényi, Tsallis is jó)
- spec: $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P}$ tiszta: $S(\varrho) = 0$

$$\varrho \in \mathcal{P}^{\text{sep}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad S(\varrho^1) = 0 \quad \text{és} \quad S(\varrho^2) = 0$$

Mit láttunk?

„Mit vigyünk haza?"

- kvantumállapotok konvex halmaza
- geometriai „ránézés"

Mit láttunk?

„Mit vigyünk haza?”

- kvantumállapotok konvex halmaza
- geometriai „ránézés”

Az összefonódáselmélet problémái

- kettőnél több részrendszerre
  Szalay, Phys. Rev. A **92**, 042329 (arXiv:1503.06071 [quant-ph])
- összefonódás osztályozása

Mit láttunk?

„Mit vigyünk haza?”

- kvantumállapotok konvex halmaza
- geometriai „ránézés”

Az összefonódáselmélet problémái

- kettőnél több részrendszerre
  Szalay, Phys. Rev. A **92**, 042329 (arXiv:1503.06071 [quant-ph])
- összefonódás osztályozása
- összefonódás detektálása

Mit láttunk?

„Mit vigyünk haza?”

- kvantumállapotok konvex halmaza
- geometriai „ránézés”

Az összefonódáselmélet problémái

- kettőnél több részrendszerre
  Szalay, Phys. Rev. A **92**, 042329 (arXiv:1503.06071 [quant-ph])
- összefonódás osztályozása
- összefonódás detektálása
- összefonódás mennyiségi jellemzése

Mit láttunk?

„Mit vigyünk haza?”

- kvantumállapotok konvex halmaza
- geometriai „ránézés”

Az összefonódáselmélet problémái

- kettőnél több részrendszerre
  Szalay, Phys. Rev. A **92**, 042329 (arXiv:1503.06071 [quant-ph])
- összefonódás osztályozása
- összefonódás detektálása
- összefonódás mennyiségi jellemzése
- ezek alkalmazásai. . .

Köszönöm a figyelmet!

ősz eleje: összefonódás nap a Wignerben

tavaszi félév: bevezető összefonódás speci a BME-n

szalay.szilard@wigner.mta.hu